

О расчете несущих железобетонных конструкций в стержневом приближении

Д.т.н. Кантур О.В., Лоскутов И.С., Глотов Д.А.

ООО «ПКБ Катриэль», г. Москва.

В общем случае задача расчета любой конструкции, в наиболее общей постановке (и вне зависимости от предполагаемого метода решения задачи) ставится как решение задачи **механики сплошной среды**.

Задача расчета напряжений, деформаций и кинематических параметров при условии статического (динамического) воздействия сводится к решению следующей системы уравнений, описывающих поведение дифференциальных объемов материала в декартовой лагранжевой системе координат:

$$\text{- уравнения равновесия [движения] } f_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho \cdot g_i = 0 = [\rho \cdot \ddot{x}]; \quad (1)$$

$$\text{- уравнения непрерывности } \frac{\Delta V}{V} = \frac{\partial(\Delta u_j)}{\partial x_j}, \left[\frac{\dot{V}}{V} = \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_j} \right]; \quad (1.1)$$

- определение деформаций (скоростей и приращений деформаций)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \text{ - без учета геометрической нелинейности;}$$

- учетом геометрической нелинейности

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial(\Delta u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\Delta u_j)}{\partial x_i} \right); \left[\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) \right]; \quad (1.2)$$

- уравнения состояния материалов:

а) соотношения теории упругости

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2 \cdot G} \cdot \left(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \cdot \frac{3 \cdot \mu}{1 + \mu} \cdot \sigma_0 \right); \quad (1.3)$$

б) математическая модель деформирования материалов сооружения, учитывающая нелинейные деформации.

На всей поверхности сооружения Γ задаются граничные условия вида

$$F(\bar{u}_{\Gamma}, \dot{\bar{u}}_{\Gamma}, \sigma_{ij\Gamma}, t) = 0, \quad (1.4)$$

во всей области решение, задаются начальные условия

$$\sigma_{ij}^0(x, y, z, t = 0), \quad \sigma_{ij}^0(x, y, z, t = 0). \quad (1.5)$$

Обозначения: f_i имеет смысл силы, действующей на единицу объема среды в направлении i ;

[] - относится только к задачам динамики; принято суммирование по повторяющимся индексам; -

$\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ - тензоры напряжений и деформаций; $-u_i$ - смещение точки среды в направлении i , в лагранжевой системе координат для выбранной точки $\Delta u_i = \Delta x_i$ [$\dot{u}_i = \dot{x}_i$]; - индексы в

выражениях эквивалентны обозначениям осей координат x_i при $(x_1, x_2, x_3) \sim (x, y, z)$; точка над переменной означает производную по времени; $\sigma_0 = \frac{\sigma_{ii}}{3}$ - среднее напряжение в среде; $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$, μ - модуль сдвига и коэффициент Пуассона, E - модуль Юнга, δ_{ij} - символ Кронекера; \bar{g} - ускорение силы тяжести (в используемой системе координат $\bar{g} = (0, 0, -g)^T$); ρ - плотность материала.

В решении линейной задачи при статическом воздействии на конструкцию существует несколько принципиальных особенностей:

- решение задачи очень слабо зависит (не зависит) от начальных условий (1.5);
- достоверно известно, что решение линейной задачи единственное при заданных конструкции и нагрузках, значительный опыт решения нелинейных статических и динамических задач позволяет утверждать, что и в этом случае решение единственное, но при этом зависит от траектории нагружения, в том числе и граничных условий.

Уравнения типа (1) прямо используются при решении пространственных задач, в практике расчета реальных конструкций чаще прибегают к использованию стержневых, оболочечных приближений, описывающих деформацию конструктивных элементов во взаимных комбинациях, в том числе и с пространственными элементами.

Особенности стержневого приближения при описании деформаций конструктивных элементов.

Использование стержневого приближения при моделировании несущих элементов конструкции предполагает в качестве параметров НДС использование внутренних усилий N, M_i, Q_i - $i = (x, y, z)$ определенных в сечениях конструкции перпендикулярных, в общем случае, изогнутой (и сжатой - растянутой) продольной оси, - нормальные сечения, физический смысл которых станет ясным из нижеприведенных соотношений.

Рассмотрим лишь плоское движение в плоскости hoz , другие формы движения могут быть получены по аналогии.¹

Рассматривая строительные несущие конструкции, в которых допускаются малые прогибы $(1/250 - 1/150) L$, L - длина стержня, можно, в силу их малости, пренебречь влиянием искривления оси стержня на направления оси x в поверхностях A_1, A_2 (в сечении стержня) на определяемые величины при относительно малых величинах Δx . Тогда $\bar{n}_1 = -\bar{n}_2$, $\bar{n}_1(\bar{n}_2) \perp \bar{e}_2$, $\bar{n}_1(\bar{n}_2) \perp \bar{e}_3$ и $\bar{n} \perp \bar{e}_1$, здесь $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = (\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$ - единичные вектора, направленные вдоль осей (x, y, z) .

¹ Расчетные соотношения для оболочек могут быть получены по аналогичной схеме.

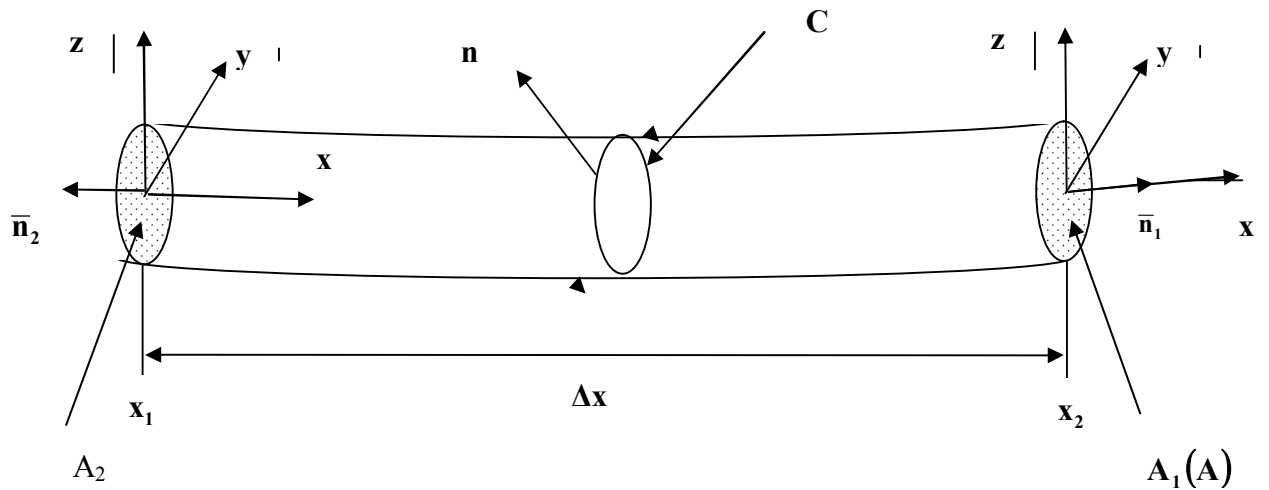


Рис. 1. Схема, иллюстрирующая фрагмент деформированного стержня.

Определим силу F_x , действующую на приведенный фрагмент в направлении x (см. 1.1), интегрируя первое из (1.1) по объему тела V

$$\begin{aligned}
 F_x &= \int_V \mathbf{f}_x \cdot dV = \int_V \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) \cdot dV = \left\langle \text{на основании формулы} \right\rangle = \\
 &= \iint_S \left[\sigma_{xx} \cdot (\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_1) + \sigma_{xy} \cdot (\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_2) + \sigma_{xz} \cdot (\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_3) \right] \cdot dS = \quad (2) \\
 &= \iint_{A_1} \sigma_{xx}^{A_1} \cdot dy \cdot dz - \iint_{A_2} \sigma_{xx}^{A_2} \cdot dy \cdot dz + \int_0^{\Delta x} dx \oint_C \left[\sigma_{xy}^{S_{бок}} \cdot (\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_2) + \sigma_{xz}^{S_{бок}} \cdot (\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_3) \right] \cdot dC.
 \end{aligned}$$

При малых $\Delta x = dx$ уравнение (2) эквивалентно

$$\frac{dN}{dx} + R_x = 0 \quad , \quad (2.1)$$

$$\text{где: } N = \iint_A \sigma_{xx}^A \cdot dy \cdot dz \quad (\text{в сечениях } A_1 \text{ и } A_2) \quad (2.2)$$

- нормальная сила, определенная в нормальном сечении A ;

$$R_x = \oint_C \left[\sigma_{xy} \cdot (\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_2) + \sigma_{xz} \cdot (\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_3) \right] \cdot dC \quad (2.3)$$

- реакция в направлении x , обусловленная взаимодействием стержня по боковой поверхности с окружающей средой, либо действующими на боковой поверхности силами.

Обратим внимание на несколько принципиальных обстоятельств:

- величины N и R_x в сечении $A_1(A)$ являются x -компонентами сил, действующих на «левую» (рис. 1) относительно сечения часть стержня;

- выражение (2.1), является прямым следствием уравнений равновесия механики сплошной среды и не зависит от тензора напряжений и тензора деформаций, истории нагружения;

- силы, действующие на выделенный объем стержня (любой объем) определяются напряжениями, «определенных» на поверхности выделенного объема.

Естественно, что при вычислении N в (2.2) интегрирование производится по части сечения, сохранившей сплошность, (в области, пересекаемой нормальной трещиной, часть интеграла равна нулю). Это первый из эффектов деформирования бетона, который «делает рассматриваемую среду «не сплошной» и нелинейной, если трещину не моделировать как выделенную особенность.

Обратим внимание на обстоятельство: если $R_x=0$ [x_1, x_2], то на этом участке $N = \text{const}$, справедливо и обратное утверждение.

Производя аналогичную процедуру для направления z (учтя наличие массовой силы, - вес материала) получим:

$$\frac{\partial Q_z}{\partial x} + R_z + g \cdot m = 0 \quad , \quad (3.1)$$

$$\text{где: } Q_z = \iint_A \sigma_{xz}^A \cdot dy \cdot dz \quad (3.2)$$

- перерезывающая сила, определенная в нормальном сечении A ;

$$R_z = \oint_C \left[\sigma_{yz} \cdot (\bar{n} \cdot \bar{e}_2) + \sigma_{zz} \cdot (\bar{n} \cdot \bar{e}_3) \right] \cdot dC \quad (3.3)$$

- реакция в направлении z , обусловленная взаимодействием стержня по боковой поверхности с окружающей средой, либо действующими на боковой поверхности силами;

$$m = \iint_A \rho \cdot dy \cdot dz \quad (3.4)$$

- «масса сечения».

При движении стержня в плоскости xOz единственной отличной от нуля компонентой момента \bar{M} является компонента M_y . Вычислим величину M_y в сечении A относительно оси y .

$$\begin{aligned} M_y &= \iint_A [\bar{r} \times \bar{f}]_y \cdot dy \cdot dz = - \iint_A z \cdot f_x \cdot dy \cdot dz = \\ &= - \iint_A \left[\frac{\partial(z \cdot \sigma_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(z \cdot \sigma_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(z \cdot \sigma_{xz})}{\partial z} - \sigma_{xz} \right] \cdot dy \cdot dz = \end{aligned} \quad (4)$$

$$= - \frac{\partial}{\partial x} \iint_A z \cdot \sigma_{xx} \cdot dy \cdot dz + \iint_A \sigma_{xz} \cdot dy \cdot dz - \oint_C z \cdot \left[\sigma_{xy} \cdot (\bar{n} \cdot \bar{e}_2) + \sigma_{xz} \cdot (\bar{n} \cdot \bar{e}_3) \right] \cdot dC$$

$$\frac{dM_y}{dx} + R_{\varphi z} - Q_z = 0 \quad (4.1)$$

$$\text{где } M_y = \iint_A z \cdot \sigma_{xx} \cdot dy \cdot dz \quad (4.2)$$

- компонента «внутреннего момента», определенная в сечении A ;

$$R_{\varphi z} = \oint_C z \cdot \left[\sigma_{xy} \cdot (\bar{n} \cdot \bar{e}_2) + \sigma_{xz} \cdot (\bar{n} \cdot \bar{e}_3) \right] \cdot dC \quad (4.3)$$

- «моментная» реакция v , обусловленная взаимодействием стержня по боковой поверхности с окружающей средой, либо действующими на боковой поверхности силами.

Определенные в сечении стержня величины обладают рядом принципиальных свойств.

1. Величины N , Q и M_y являются компонентами векторов (проекции на оси координат (x,y,z)) и являются следствием уравнений равновесия механики сплошной среды с использованием единственного приближения: деформация стержня сводится к взаимному смещению его нормальных плоскостей. Нарушение любого из этих положений делает зависимости (2)-(5), строго говоря, неверными.

Основные эффекты, способные привести к нарушению вышеназванных приближений при использовании моделей стержней и оболочек: трещинообразование, нелинейные деформации в сжатой зоне бетона, сдвиговые деформации, торцевые эффекты и эффекты, связанные с неоднородностью конструктивных элементов, «скачки нагрузки».

2. При выводе соотношений (2)-(4) не использовались никакие дополнительные требования к выбору начала координат в нормальном сечении, поэтому «продольная ось» стержня может быть выбрана в любом месте.

3. Не использовались никакие предположения об уравнениях состояния материала стержня, поэтому величины N , Q_z , R_x , R_z , $R_{\varphi z}$ могут быть определены с использованием любых уравнений состояния.

4. Использование вышеприведенных уравнений недостаточно для расчета деформаций стержневой системы. Даже при использовании упругого приближения должна быть введена гипотеза о распределении напряжений по сечению стержневой конструкции.

5. Расчет внутренних усилий в стержневых конструкциях является способом вычисления интегралов N , Q_z , M_y (2.2, 3.2, 4.2) с учетом взаимодействия конструктивных элементов. Отметим, что даже для горизонтальных конструкций результаты расчетов с учетом и без учета геометрической нелинейности незначительно отличаются друг от друга, аналогичные результаты характерны и при «некотором» изменении модулей упругости.

6. Используя в качестве расчета варианты конечно-разностного расчета или метода конечных элементов, оперирующего понятиями «условия связи элементов», «условия, заданные на границе расчетных областей» и т.д., следует констатировать, что такие понятия, как «статическая неопределимость (определимость)», «неразрезность», перешедшие в системы современного расчета строительных конструкций, не имеют серьезного смысла при расчете внутренних усилий в стержнях (и вообще всех конструктивных элементов). При статическом расчете в подобных методах задача решается всегда с учетом деформаций всех элементов.

7. Задача расчета арматуры для обеспечения требований 1 и 2 групп предельных состояний использует совершенно независимые от методов определения внутренних усилий гипотезы о распределении напряжений по нормальным сечениям.

8. Самое главное. Для расчета арматуры и прогибов, сжатия-растяжения стержня, у нас нет более надежной информации, чем внутренние усилия - интегральные характеристики сечений несущих железобетонных элементов конструкции, обеспечение возможности восприятия которых и является основной задачей конструирования сечений стержневых элементов.

Некоторые примеры из практики расчетов конструкций

1. Деформация горизонтальной балки при действии собственного веса и распределенной нагрузки.

Балка: призматическая шарнирно опертая длиной $L = 3$ м. Сечение $h = 60$ см, $b = 30$ см.

Свойства материалов.

Расчетные характеристики бетона класса В35, МПа (кгс/см^2).

модуль упругости, E	Пределные состояния второй группы		Пределные состояния первой группы	
	осевое сжатие, R_{bn}	осевое растяжение, R_{btn}	осевое сжатие, R_b	Осевое растяжение, R_{bt}
34,5 (352)	25,5 (259)	1,95 (20)	19,5 (199)	1,2 (12,2)

Критериальными считались предельные состояния первой группы (отмечено в таблице).

Расчетные характеристики арматуры класса А400С, МПа (кгс/см^2):

Расчетное сопротивление арматуры:

- растяжению для предельного состояния первой группы $R_s - 365$ (3750)
- сжатию для предельного состояния первой группы $R_{sc} - 365$ (3750)
- поперечной растяжению для предельного состояния первой группы $R_{sw} - 290$ (2970)
- растяжению для предельного состояния второй группы $R_{s,ser} - 400$ (4080)

Модуль упругости арматуры $E_s - 200000$ (2000000)

Некоторые особенности модели.

1. Призматический стержень;
2. Стержень- оболочка. На левом и правом краях все узлы объединены твердыми телами не допускающими изгиб. Опора устанавливалась на ведущий узел по центру торцов.

На торцах (опорах) подавлялись все степени свободы кроме вращения относительно оси y

Нагрузки

-L1: вес тела при плотности $\rho = 24.525$ кН / м³;

- L2: распределенная нагрузка 100 кН/м в стержне и по верхнему торцу балки плиты;

- комбинация нагружений; C1= L1+L2..

При определении расчетных сочетаний усилий полагалось: нагрузки постоянные, коэффициенты надежности по нагрузке равны 1.3.

Некоторые результаты.

Упругие (не армированные) системы имеют идентичные вертикальные перемещения при действующих нагрузках, $z_m = 0.68$ мм.

Максимальные и минимальные значения нормальных напряжений (здесь σ_{xx}) определялись по результатам расчета балки-оболочки при комбинации нагружений C1.

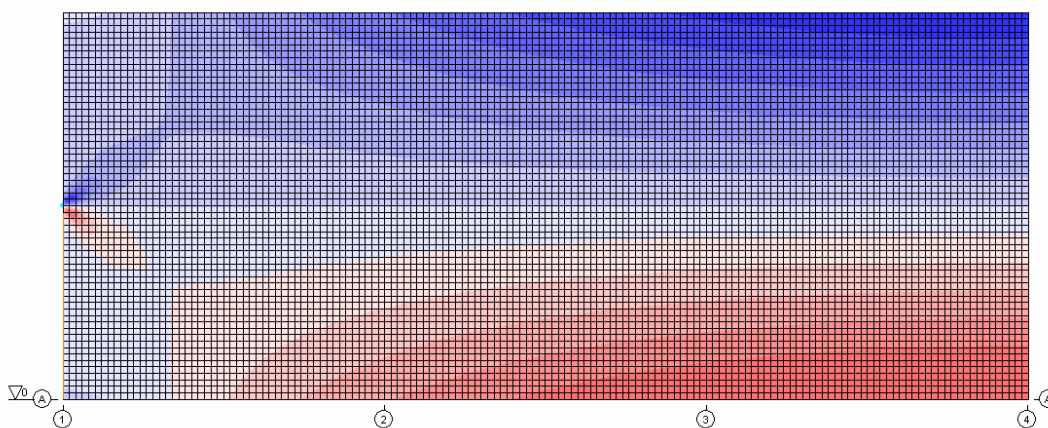


Рис. 2 Нормальные напряжения σ_{xx} в балке-оболочке. Левая половина расчетной области. Расстояние между цифровыми осями равно 0.5 м. Ось 4 – плоскость симметрии. А). Сини и красные цвета – напряжения различных знаков.

Влияние условий на торце по характеру распределения σ_{xx} ощущается на расстоянии около (0.5 - 0.6) м, не смотря на заранее предпринятые меры, которые должны были уменьшить этот эффект.

Б) Величина нормальных напряжений сжатия (верхняя часть в центре пролета) достигает величины $\sigma_{\min} = -67.25 \text{ кг/см}^2$ ($R_b = 199 \text{ кг/см}^2$).

В) Величина нормальной силы в стержне:

- линейный расчет $N = 0$, отметим, что на торцах не допускается поступательное перемещение; при учете геометрической нелинейности $N = 0.14 \text{ кГ}$.

-, в балке-оболочке отличия очень малы.

Вертикальные перемещения в обоих случаях практически не изменяются.

Учет геометрической нелинейности приводит к изменению результатов расчетов на малые величины.

Г) Результаты расчета арматуры.

Балка-стержень. Обозначения приведенных величин соответствуют принятым в ПК SCAD. Величины $h1 = AS1/b$, $h2 = AS2/b$.

Таблица

Границы сетки таблицы соответствуют осям 1,2,4. Приведенные значения соответствуют правым границам интервалов между осями

$AS1 = 4.86 \text{ см}^2$, $h1 = 0.162 \text{ см}$	$AS1 = 8.48 \text{ см}^2$, $h1 = 0.283$	$AS1 = 9.76 \text{ см}^2$, $h1 = 0.325$
$AS2 = 1.78 \text{ см}^2$, $h2 = 0.06 \text{ см}$	$AS2 = 1.78 \text{ см}^2$, $h2 = 0.06 \text{ см}$	$AS2 = 1.78 \text{ см}^2$, $h2 = 0.06 \text{ см}$

Балка-оболочка.

Продольная арматура (вдоль продольной оси)

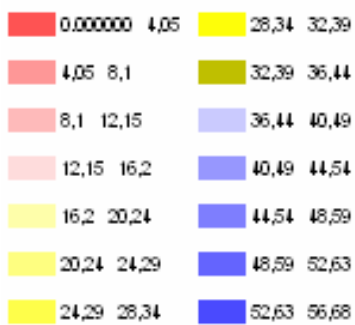
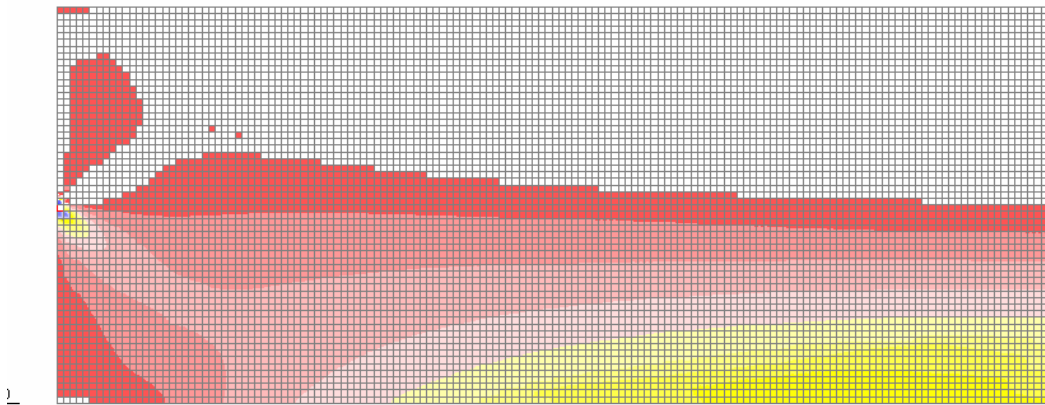
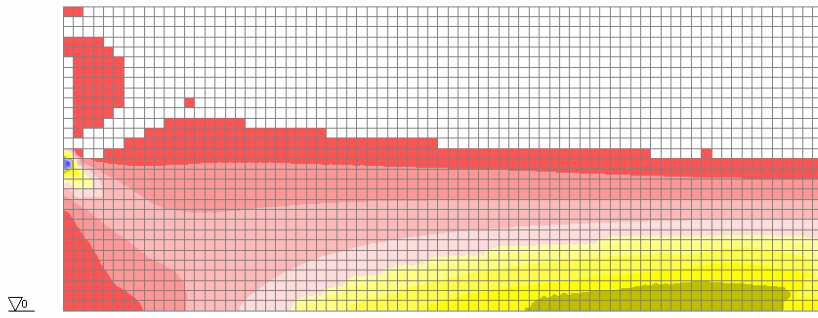


Рис. 3. Распределение арматуры в балке-оболочке в направлении продольной оси.

Д). соответствии с данными, приведенными в таблице п.Г армировалась балка-оболочка слоями эквивалентной толщины с защитным слоем равным $a = 4$ см.

Е). По результатам расчета балки-оболочки в комбинации нагрузжений определяются и фрагментируются области, в которых $\sigma_{xx} \geq R_{bt}$. Выделенный фрагмент расчленяется областями с удаленными КЭ, параллельными оси Z с шагом по X 0.2-0.5м до «полного исчезновения» областей с недопустимыми растягивающими напряжениями в несколько итераций. На рис. 4 приведен промежуточный вариант подобного итерационного процесса.

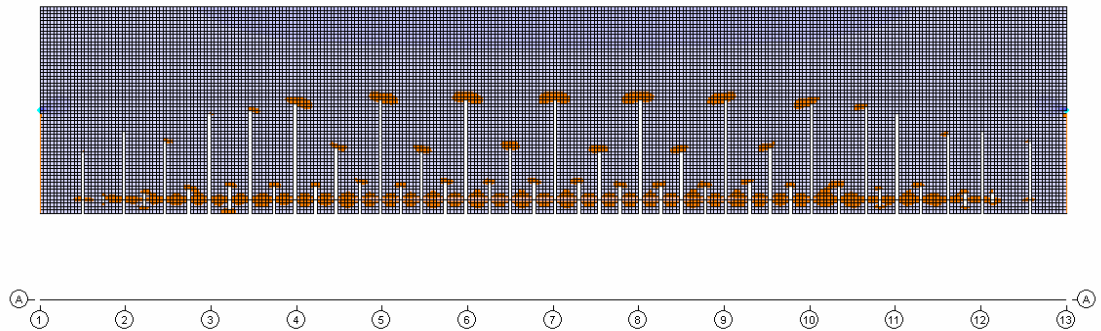


Рис. 4. Распределение напряжений в балке-оболочке. Оранжевые области соответствуют условию $\sigma_{xx} \geq R_{bt}$.

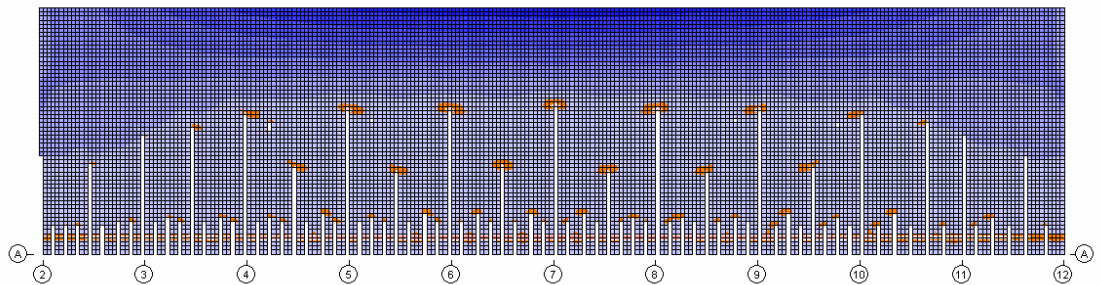


Рис. 5. Распределение напряжений в балке-оболочке. Оранжевые области соответствуют условию $\sigma_{xx} \geq R_{bt}$. Следующая итерация.

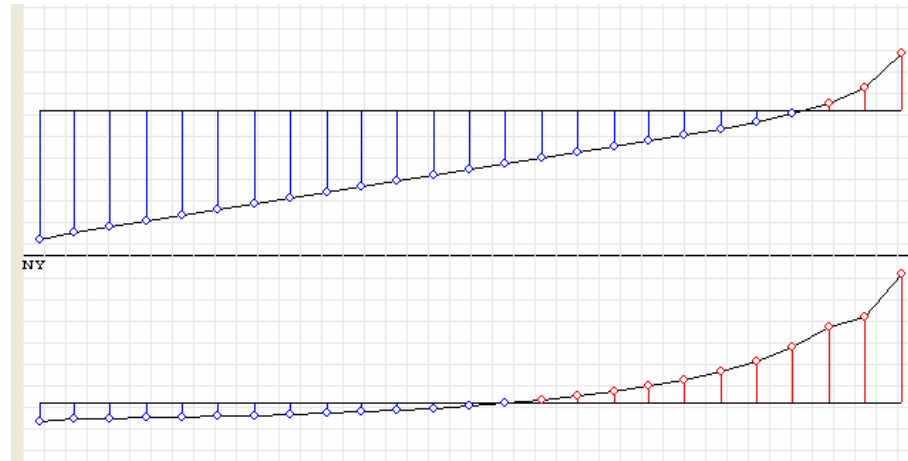


Рис. 6. Распределение напряжений σ_{xx} и σ_{yy} вдоль оси z (горизонтальная ось) над «трещиной по оси 7» (слева - направо – от верхней поверхности да устья «трещины»). Значения напряжений в пролете вблизи верхней поверхности балки: $\sigma_{xx} = -112 \text{ кг/см}^2$ и $\sigma_{yy} = -4 \text{ кг/см}^2$.

Отметим, что для данной стадии расчета вертикальные смещения точек в центре пролета достигли величин 1.52 мм (почти в 3 раза превышают перемещения точек упругой балки).

По-видимому, процесс образования трещин является преобладающим в увеличении прогибов несущих конструкций, воспринимающих нагрузку за счет изгибной жесткости.

В областях контакта нижней арматуры с бетоном резко увеличивается интенсивность нормальных напряжений, достигая в пролете величины $\sigma_i = 138 \text{ кг/см}^3$.

Надо ли армировать еще «армированную» балку?

Формальный расчет арматуры балки-оболочки показал, что рассматриваемый объект с «трещинами» должен дополнительно армироваться стержнями $\text{Ø}6$ с шагом 10 см в продольном и вертикальном направлении. Расчет требуемого армирования неармированной упругой балки-оболочки в нижней части пролета показал, что требуется лишь продольная арматура $\text{Ø}20$ с шагом 10 см.!!!